EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN IN BINNEN- EN BUITENLAND

36e JAARGANG 1960/61
IV - 15 DECEMBER 1960

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Jan Huitzingstraat 43 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET WISKUNDE-ONDERWIJS OP DE ZUID-AFRIKAANSE MIDDELBARE SCHOLEN EN HET EINDEXAMEN WISKUNDE

door

Dr. H. TURKSTRA

Hilversum

Nu in ons land voor het vraagstuk van de vernieuwing, en de modernisering van de schoolwiskunde grote belangstelling bestaat en er, ofschoon langzaam, toch wel enige vorderingen worden gemaakt, zal het ons misschien interesseren, hoe het ten dezen op de scholen in het stamverwante land Zuid-Afrika staat.

Ik was in de gelukkige omstandigheid tijdens mijn verblijf in Zuid-Afrika dit jaar verschillende middelbare scholen te kunnen bezoeken en daar wiskundelessen bij te wonen. Bovendien had ik het genoegen enige malen de gast te zijn op wiskunde conferenties, waarbij ik ruimschoots gelegenheid had met mijn Zuid-Afrikaanse collega's van gedachten te wisselen over vraagstukken van methodiek en didactiek, van vernieuwing van het wiskunde-programma en het eindexamen, e.d.

Vooraf moet ik U echter enig idee geven van de organisatie van de middelbare school, in Zuid-Afrika hoëre school of highschool (in de Engels sprekende gebieden) genoemd.

Deze hoëre school (in sommige plaatsen ook wel Gymnasium genoemd) is 5 jarig en sluit aan op de z.g. primaire- of volksschool, waarvan de 7 leerjaren opvolgend met graad 1, graad 2, Standaard I t/m Standaard V worden aangeduid. Standaard VI t/m Standaard X vormen dan de 5 klassen van de hoëre school. Standaard X wordt afgesloten met een sterk gedifferentiëerd einddiploma, matriek of matriculation, ook wel Standaard X-sertificaat genoemd, dat al of niet toelating tot de universitaire studie verleent.

Het wiskunde-onderwijs in Standaard VI is minder exact dan in de 1e klas van onze V.H.M.O. scholen. Het eerste halfjaar is eigenlijk een herhaling van het rekenonderwijs in Standaard V met invoering van de algebraïsche schrijfwijze der getallen. Rekenen, Algebra en Meetkunde worden in Standaard VI en VII dan ook onder de naam *Algemene Wiskunde* gegeven. Een in Zuid-Afrika

veel gebruikt leerboek van Van Schouwenburg, Geldenhuys en Corbett heeft o.a. tot titel „*Wiskunde is maklik*", waarvan deeltje I in Standaard VI, en deeltje II in Standaard VII wordt gebruikt en waarin stelselmatig is doorgevoerd: rekenen, algebra ('n nuwe taal) en meetkunde (intuïtieve methode) in eenzelfde deeltje ondergebracht. De negatieve getallen worden eerst in Standaard VII behandeld, d.i. dus in de 2e klas van de hoëre school. De aansluiting rekenen L.O.-wiskunde M.O. is er bepaald soepeler dan bij ons (iets voor onze toekomstige brugklas).

Het zal dan ook niet verwonderen, dat met deze eenvoudige opzet in de onderbouw men in de hogere klassen minder ver komt dan op onze V.H.M.O. scholen. Toch haast ik mij te zeggen, dat het wiskunde-onderwijs aldaar daarom niet als van minder waarde mag worden gekwalificeerd. De V.H.M.O. scholen in Zuid-Afrika en eigenlijk ook de volkscholen dateren eigenlijk eerst van na de 2e boerenoorlog van 1899—1902, toen er bij de Z.-A. bevolking een hartstochtelijk verlangen was om de culturele achterstand in te halen, teneinde de Engelse overheersing meer geestelijke weerstand te kunnen bieden. Een hoogleraar aan de Potchefstroomse Universiteit drukte het zo uit: „Ons het teen die Engelse overmag moet swig, maar ons wil nie die mindere van die Engelsman zijn nie, en daarom moet ons ons ontwikkel". Ik heb bewondering voor wat in deze 50 jaren in Z.-A. op onderwijsgebied is verricht. Als wij in ons land na een eeuw middelbaar onderwijs (oprichting H.B.S. door Thorbecke in 1864) met een vrijwel onveranderd wiskunde-program op de H.B.S. B ons nu eindelijk op een vernieuwing en meer inpassing van moderne wiskunde in onze verouderde wiskunde-programma's bezinnen, dan mogen wij het ietwat lagere niveau van de wiskunde op de Z.-A. hoëre scholen met een ervaring van nauwelijks een halve eeuw niet euvel duiden. Integendeel, ik heb met voldoening geconstateerd, dat zowel door de wiskunde-hoogleraren aan de Universiteit als door de wiskunde-leraren aan de hoëre scholen actief wordt gestreefd naar een vernieuwing en modernisering van het wiskunde-programma en naar didactische bezinning. Op een bijeenkomst in de Universiteit van Pretoria, waar ik was uitgenodigd om voor de leden van de Zuid-Afrikaanse Wiskunde-Vereniging een inleiding te houden over „Die noodsaak van didaktiese besinning vir wiskunde-onderwijsers bij hulle onderwijs aan hoëreskole" werd mij dat in de discussie bijzonder duidelijk. En wat ons tot voldoening mag stemmen, is dat men met de ontwikkeling van zaken in ons land (Euclides, Wimecos, W.V.O.) op de hoogte was en daar in de toekomst zich op wil richten.

Na deze uitweiding kom ik nu op *het eindexamen*. Behoudens geringe, niet essentiële verschillen in de eindexamenprogramma's in de 4 landen, die tezamen in de Unie van Zuid-Afrika verenigd zijn (Transvaal, Oranje Vrijstaat, Kaapprovincie en Natal), is wel algemeen, dat het eindexamen wiskunde 2 onderdelen omvat, n.l.: *A*. algebra en grafieken; *B*. vlakke meetkunde en trigonometrie, dus geen Stereometrie en Beschr. Meetkunde en ook geen Analytische meetkunde en Differentiaal-Integraalrekening.

De examenopgaven voor deze vakken onder A en B berusten op een ongelooflijke vraagstukkenroutine, zoals bij ons de wiskundeopgaven (speciaal die voor planimetrie) voor het examen Wiskunde L.O., 25 jaar geleden. Bepaald gemakkelijk zijn ze niet, maar nogmaals gezegd ze zijn niet modern, zo in de trant van de opgaven in de laatste Herhaling van onze algebra- en meetkunde- en trigonometrieboeken, gebruikt in onze 3e klas h.b.s. (planimetrie) en 4e klas h.b.s. (algebra, trigonometrie). Om U van de aard dezer opgaven nog een beter idee te geven, meen ik het beste te doen door de eindexamenopgaven van 1959 in de Kaapprovincie opgegeven, aan 't eind van dit artikel af te drukken, met de beoordelingsnormen er bijgevoegd.

Vooraf echter nog enkele algemene opmerkingen. De cijfertoekenning voor de 6 eindexamenvakken is naar de volgende schaal in procenten p uitgedrukt:

A	$p \geqq 80\,\%$
B	$75\,\% \leqq p \leqq 80\,\%$
BB	$70\,\% \leqq p \leqq 75\,\%$
C	$60\,\% \leqq p \leqq 70\,\%$
D	$50\,\% \leqq p \leqq 60\,\%$
E	$40\,\% \leqq p \leqq 50\,\%$
F	$33\frac{1}{3}\% \leqq p \leqq 40\,\%$
FF	$30\,\% \leqq p \leqq 33\frac{1}{3}\%$
G	$20\,\% \leqq p \leqq 30\,\%$

Een vrij ingewikkelde procedure geldt voor slagen, n.l.:

geen 2 vakken FF of G;
geen taal beneden $33\frac{1}{3}\,\%$ (FF);
gemiddeld cijfer $\geqq 40\,\%$ (dus E),

waarbij dan nog onderscheid wordt gemaakt tussen *slagen met graad* (d.w.z. toegelaten tot Universitaire studie voor 't behalen van een graad) èn *slagen met diploma* zonder meer.

Ter nadere toelichting volgen hier de gegevens, die de principaal van de hoëreskool in *Aliwal Noord* (Kaapprovincie) mij meedeelde

omtrent de ruim 5500 kandidaten, die in 1959 aan het eindexamen in de Kaapprovincie deelnamen: „Van hierdie ruim 5500 het net 700 nie die paal gehaal nie; 1400 slaag 1e klas (gem. meer dan 60 %, dus C); van hierdie 1400 ruim 1000, die naar Universiteit mag gaan".

Deze laatste 1000 waren dus geslaagd *met graad.* In bepaalde gevallen echter was het voor de overige geslaagden, naar ik vernam, toch nog wel weer mogelijk aan de Universiteit voor een graad te studeren, b.v. voor wiskunde of andere B vakken, mits voor wiskunde de graadkwalificatie was behaald d.i. dus $p \geqq 60\ \%$) en voor elk der andere vakken $p \geqq 40\ \%$.

Ten slotte geef ik als voorbeeld nog de eindexamenlijst van een geslaagde kandidate, die aan de Universiteit voor de graad (B.A) d.i. bachelor of Arts voor geschiedenis of voor (B Sc) d.i. bachelor of Sciences mocht studeren, maar niet voor talen:

Afrikaans	D	
Engels	E	
Nat/Skeik.	C	gemidd C
Wiskunde	BB	
{ Boekhou	A	
{ Handelsrek	A	
Geskied	A	

Bovenstaande gegevens golden voor de Kaapprovincie.

Om volledig te zijn geef ik ten slotte nog hetgeen ik ontleende aan het programma van de Hugenote-Hoërmeissiesskool te Springs (Transvaal):

Standaard IX en X

Afrikaans
Engels

en dan nog 4 van die volgende vakke:

Natuur- en Skeikunde
Wiskunde
Duits
Geskiedenis
Boekhou
Tikskrif
Snelskrif

Opmerkings:

1. Al die kursusse bied geleentheid om 'n St X-sertifikaat te behaal.
2. Leerlinge wat 'n Universiteitskursus wil volg, moet Duits of

Wiskunde of albei kies. Indien Duits alleen gekies word, moet Biologie ook in St. IX en X geneem word.
3. Leerlinge wat Natuur- en Skeikunde wil neem, moet Wiskunde neem.

Nog vermeldenswaard is, dat een bepaald systeem van z.g. „onderskeidings" zeer de eerzucht tot het behalen van zoveel mogelijk onderscheidingen in de hand werkt, zodat ik constateerde, dat in St X zeer hard werd gewerkt en een betrekkelijk groot aantal kandidaten één of meer onderscheidingen behaalde (max. 6, want 6 examenvakken). Speciaal voor *wiskunde* lag het percentage hoger dan voor de andere vakken, waaruit ik de dubbele conclusie meen te mogen trekken, dat er door de leraren goed wiskunde-onderwijs wordt gegeven èn dat de wiskunde-aanleg bij de Z.A. leerlingen in 't algemeen goed mag genoemd worden. Misschien zal iemand uwer opmerken: „en dat de opgaven voor wiskunde vergelijkenderwijs gemakkelijker zijn dan die voor de andere vakken". Maar daar ben ik het, mede door kennisname van de werkstukken voor die andere vakken, niet mee eens.

Hier volgt nu de tabel, waaruit U het hoge percentage onderscheidingen voor wiskunde kunt lezen:

Middelbare skool

EKSAMENUITSLAE, 1942—1959

Die aantal inskrywings, onderskeidings en persentasies in die Eindsertifikaat vir Transvaalse Middelbare Skole

	Wisk.	*Skei-Nat.*	*Boekh.*	*Duits*	*Latyn*	*Gesk.*	*Biologie*	*Eng.A.*	*Eng.B.*	*Afri.A.*	*Afr.B.*	*Aardr.*	*Jaar*
1.	1692	1518	894	606	465	2064	1183	1377	1116	1369	1111	589	1942-46
2.	2082	1814	985	675	594	1967	1371	1249	1577	1583	1231	638	1947-51
3.	3.19	4.70	7.80	4.26	6.62	1.38	1.72	.75	1.64	.38	.95	.41	1942-46
4.	7.91	2.07	6.28	4.45	6.62	1.08	1.45	.75	1.11	.79	.70	.57	1947-51
5.	2417	2004	1093	794	608	2192	1676	1428	1878	1881	1419	742	1952
6.	2948	2432	1420	842	847	2466	2159	1678	2345	2349	1688	843	1954
7.	3369	2829	1425	981	930	2629	2495	1890	2753	2752	1885	975	1955
8.	3991	3387	2059	1152	1099	3425	3125	2190	3636	3639	2184	1193	1957
9.	4448	3721	2177	1252	1192	3793	3248	2400	3949	3950	2396	1289	1958
10.	4666	4014	2374	1505	1209	4041	3573	2537	4340	4347	2521	1263	1959
11.	442	223	159	106	65	146	58	23	67	68	19	10	1959
12.	7.68	3.04	3.01	5.29	7.07	.68	3.34	70	2.13	.58	.35	1.75	1952
13.	9.12	4.06	6.38	3.92	8.38	2.96	4.11	.59	2.26	.72	1.54	1.66	1954
14.	6.74	5.79	6.56	7.64	7.83	4.26	2.46	1.00	1.73	1.24	1.51	1.26	1957
15.	8.88	4.73	6.98	6.87.	6.29	3.88	2.22	1.08	1.47	1.24	1.04	.93	1958
16.	9.47	5.56	6.69	7.04	5.38	3.61	1.62	.09	1.57	1.56	.07	.08	1959
17.	9.64	5.79	7.80	7.64	8.38	4.26	4.11	1.57	2.26	1.56	1.54	1.75	1942-59
18.	3.19	.79	3.01	2.57	4.64	.68	.59	.09	.84	.38	.32	.08	1942-59

Uiteensetting: Sedert 1954 is Boekhou en Boekhou en Handelsrekene saam bereken. Nrs. 1-2 dui aan die gemiddelde aantal inskrywings, nrs. 3 en 4 die gemiddelde persentasie onderskeidings vir genoemde jare en nr. 11 die aantal onderskeidings vir 1959. Soos u sal onthou is daar geen uitslae aan die pers in 1956 verskaf nie. Nrs. 17 en 18 gee die hoogste en die laagste persentasie onderskeidings onderskeidelik gedurende 1942-59. Nrs. 5-10 gee die aantal inskrywings en 12-16 die persentasie onderskeidings. Daar was in 1959, 1473 kandidate vir Huishoudkunde, 6 met onderskeidings wat .04 beteken

Dat de wiskunde programma's en ook het eindexamen vernieuwd moeten worden, is door mij in 't voorgaande reeds betoogd. En dat daaraan gewerkt wordt heb ik ook reeds doen uitkomen. Prof. D. J. van Rooy, die in ons land geen onbekende is (hij is

o.a. medewerker aan Euclides en bezocht ook het internationale mathematisch congres in Amsterdam in 1954), ijvert hiervoor, doch hij is niet de enige. Verschillende andere wiskunde-hoogleraren en wiskunde-leraren, met wie ik mocht kennis maken, steunen hem hierbij [1]).

Een verslag van een toespraak van Prof. van Rooy, gehouden op een vakbijeenkomst van wiskunde-leraren, over de vernieuwing van het wiskunde-leerplan door toevoeging van het vak *analytische meetkunde*, is vermeld aan 't eind van mijn artikel.

Prof. van Rooy erkent zelf, dat het nog maar weinig is, maar men werkt tenminste in de goede richting.

Hier volgen nu de *eindexamenopgaven* 1959 in de *Kaapprovincie*:

Eerste Vraestel. Algebra en Grafieken;

Tweede Vraestel. Planimetrie en Trigonometrie;

en voorts de toespraak van Prof. D. J. van Rooy.

SENIOR SERTIFIKAAT.
WISKUNDE.
(Eerste Vraestel.)

1959.] [Twee uur.

DEPARTEMENT VAN ONDERWIJS.
KAAP DIE GOEIE HOOP.

SENIOR SERTIFIKAAT-EKSAMEN.

Skryf op die voor-buiteblad van u antwoordeboek, teenoor die woord „Eksamenvak" —

WISKUNDE (EERSTE VRAESTEL).

Skryf bo elke antwoord die *nommer* van die vraag.

(Al die nodige werk moet op die regte plek met u antwoord aangedui word. Die linkerbladsye kan vir kladwerk gebruik word).

1. (*a*) In die berekening van jaargelde word die formule $S = \dfrac{a(R^n - 1)}{R - 1}$ gebruik.

Maak van log tafels gebruik om die waarde van a te bepaal wanneer $S = 3370$, $R = 1{\cdot}035$ en $n = 5$.

(*b*) Druk die waarde van $\dfrac{x}{a}$ uit in b en y as $\dfrac{a}{x} = 1 - \dfrac{y}{b}$ en die waarde van $\dfrac{c}{z}$ ook in b en y as $\dfrac{b}{y} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Gebruik hierdie waardes om te bewys dat $\dfrac{x}{a} + \dfrac{c}{z} = 1$. [14]

[1]) Zie bijv. A. J. van Zyl: Mathematics at the Cross-Roads (Maskew Miller Ltd, Capetown 1942).

2. (*a*) Ontbind in faktore:—
   (i) $(x - 1)^2 - 4(x - 5)^2$;
   (ii) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4$.

   (*b*) Bepaal die faktore van $6x^2 - x - 15$ en skryf dan die faktore van $6(2x - 3)^2 - (2x - 3) - 15$ neer, en vereenvoudig hulle. [15]

3. (*a*) Gee, sonder bewys, die restestelling.

   (*b*) As $(x - 2)$ 'n faktor van $ax^3 + bx + 6$ is, maar daar bly 'n res van 12 wanneer hierdie uitdrukking deur $(x + 1)$ gedeel word, bepaal die waardes van a en b.

   (*c*) Gebruik die restestelling om te bewys dat $x + y$ 'n faktor van $x^n + y^n$ is wanneer n 'n onewe heeltal is, maar nie wanneer n 'n ewe heeltal is nie. [13]

4. (*a*) Bewys dat $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ waar m en n positiewe heeltalle is en m groter as n is.

   (*b*) Bepaal sonder om tafels te gebruik die waarde van x in:—

   (i) $2 \times 4^{x-1} = 8^{-x}$.
   (ii) $x = (2^{1\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}) \times 2^{-\frac{1}{2}}$. (Vereenvoudig).
   (iii) $\log x + \log 7 = \log(x + 2) + \log 5$.
   (iv) $\frac{\log x}{\log 7} = \frac{\log 16}{\log 4}$. [19]

5. (*a*) Bepaal die waardes van x wat aan die uitdrukking $x(7 - 2x) - 3$ 'n positiewe waarde sal gee.
   Bepaal verder die maksimum waarde van hierdie uitdrukking.

   (*b*) Vir watter waardes van c sal die uitdrukking $x(7 - 2x) - c$ negatief wees vir alle reële waardes van x? [13]

6. (*a*) Los die vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$ op sonder om die formule te gebruik.

   (*b*) Los die vergelyking $2(x - 1) - \frac{3}{x - 1} = 5$ op.

   (*c*) As $2(x - 1) - \frac{y^2}{x - 1} = y$ en $x - y = 2$, bepaal die waardes van x en y. [18]

7. 'n Man het per motor op reis gegaan. Gedurende die eerste dag het hy 96 myl afgelê en sy motor het gemiddeld een gelling petrol gebruik op elke x myl.
   Die tweede dag het hy 126 myl gery maar omdat die paaie nat was, het sy motor drie myl minder op 'n gelling petrol gegaan, met die gevolg dat hy twee gellings meer gebruik het as op die eerste dag.
   Druk in x uit hoeveel gellings petrol hy op elk van die twee dae gebruik het.
   Bepaal dan hoeveel myl die motor gemiddeld op 'n gelling petrol afgelê het op elk van die twee dae.
   Bereken ook die gemiddelde petrol verbruik vir die hele rit. [18]

8. (*a*) Trek, sonder om enige punte af te steek, rowwe sketse op u antwoordboek van die grafieke:—

(i) $x = y(y + a)$ waar a positief is.

(ii) $y = mx + c$ waar m en c beide negatief is.

(*b*) Gebruik een duim per eenheid op albei asse as skaal en trek die volgende grafieke:—

(i) Die grafiek van die uitdrukking $3 + 2x - x^2$ vir waardes van x vanaf $-1\frac{1}{2}$ tot $+3\frac{1}{2}$.
Maak gebruik van hierdie grafiek om die vergelyking $x^2 = 2x + 1$ op te los.

(ii) Die reguit lyn $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = y$ en skrywe dan die waardes van x neer waarvoor $\dfrac{3 + 2x - x^2}{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}$ negatief is.

(iii) 'n Reguit lyn wat deur die punte (0, 3) en (3, 0) gaan en skrywe die vergelyking van hierdie lyn neer. Lees die koördinate van die punte af waar hierdie lyn die grafiek van die uitdrukking $1 + 2x - x^2$ sou sny, sonder om die grafiek van $1 + 2x - x^2$ te teken. [40]

SENIOR SERTIFIKAAT.
WISKUNDE.
(Tweede Vraestel.)

1959.] [Twee uur.

DEPARTEMENT VAN ONDERWYS.

KAAP DIE GOEIE HOOP.

SENIOR SERTIFIKAAT-EKSAMEN.

Skryf op die voor-buiteblad van u antwoordeboek, teenoor die woord „Eksamenvak"—

WISKUNDE (TWEEDE VRAESTEL).

Skryf bo elke antwoord die *nommer* van die vraag.

(In alle vrae mag die „Gegee" en „Gevra" weggelaat word. Gebruik die linkerbladsye vir kladwerk en om duidelike figure te teken.)

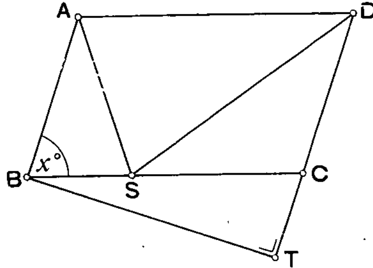
1. (*a*) (i) AB is 'n koord van 'n sirkel O en OC is loodreg op AB in C. Bewys dat $AC = CB$.

(ii) ST is 'n middellyn van die sirkel M met straal 2·5 duim. PQ is 'n koord van hierdie sirkel loodreg op ST in K sodat $KT = 1$ duim. Bereken die lengte van PQ. Verbind SP en SQ en bewys dat $\angle PQS > \angle PSQ$.

(*b*) ABS is 'n driehoek met $AB = AS$. BS word verleng na C sodat $SC = AS$ en die parallelogram $ABCD$ word voltooi. BT is loodreg op die verlengde DC in T.

(i) As $AB = 5$ cm. en die oppervlakte van $\triangle ASD = 19$ vk. cm., bereken die lengte van BT.

(ii) As $\angle B = x°$, noem met opgaaf van redes, nog *vier* hoeke wat elk gelyk is aan x. Druk $\angle ADS$ uit in x en bereken vir watter waarde van x, $AD = DS$ is.



[31]

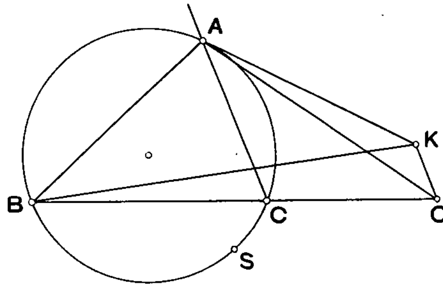
2. (*a*) $ABCD$ is 'n koordevierhoek. Bewys dat die som van 'n paar oorstaande hoeke van $ABCD$ gelyk is aan 180°. Gee, sonder bewys, die omgekeerde van hierdie stelling.

(*b*) AK is 'n raaklyn aan die sirkel ABC by A. O is 'n punt op die verlengde van BC sodat $KO \parallel AC$. AB, BK en AO word verbind. Bewys dat—

(i) $ABOK$ 'n koordevierhoek is.

(ii) $\triangle ABK \parallel\!| \triangle CAO$.

As dit verder gegee is dat S, die middelpunt van die sirkel $ABOK$, op die omtrek van die sirkel ABC lê, bewys dat $AB = AK$.



[26]

3. (Geen bewyse of beskrywings is hier nodig nie. Konstruksielyne moet egter duidelik getoon word).

Konstrueer $\triangle ABC$ met $AB = 3''$, $\angle B = 105°$ en die hoogtelyn uit C op $AB = 2''$.

Voltooi nou (i) vierhoek $ABCS$ met die straal van die omgeskrewe sirkel van $\triangle ABS = 1{\cdot}6''$ en $\angle BCS$ op sy maksimum grootte. (ii) $\triangle BST$, met S en T aan dieselfde kant van BC, sodat $BS^2 = BC.ST$. [23]

4. (*a*) Sonder om tafels te gebruik, bepaal, deur konstruksie en meting, die benaderde waarde van tan y, as tan $x = 0{\cdot}5$ en cos $(x + y) = -\ 0{\cdot}8$. (Hoeke moet duidelik getoon word).

(*b*) Bepaal, met behulp van tafels die waarde van x tussen 0° en 180° as $\tan 3x = 3 \cos 112° 21'$.

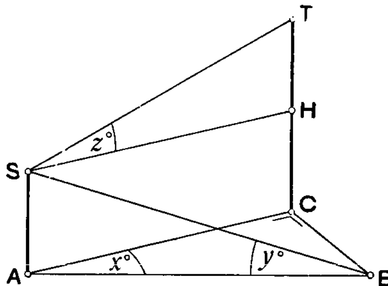
(*c*) In $\triangle ABC$ is $\angle A$ stomp. Bewys dat die oppervlakte van $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ *b.c.* sin A.

Bepaal die oppervlakte van die vierhoek $ABCD$ as $AB = 2{\cdot}5''$, $BC = 2''$, hoeklyn $BD = 3''$, $\angle ABD = 10° 32'$ en $\angle CBD = 112° 26'$. [28]

5. In meegaande figuur is SA en TC twee regop pale. B is 'n punt in dieselfde horisontale vlak as A en C, sodat $\angle ACB = 90°$ en $\angle BAC = x°$. As die hoogtehoek van S uit B $y°$ en die van T uit S, $z°$ is, bewys dat die verskil (h) tussen die hoogtes van SA en TC gegee word deur—

$$h = \frac{SA.\ \cos x.\ \tan z}{\tan y}$$

Bepaal hieruit die waarde van h, as $SA = 22 \cdot x$ vt., $x = 62° 26'$, $y = 40° 40'$ en $z = 33° 33'$ en bereken dan die lengte van ST.



[22]

6. Teken op dieselfde assestelsel die grafieke van (i) $y = 2 \sin x$ en (ii) $y = \tan\left(\frac{x}{2} - 20°\right) - 0{\cdot}5$ vir waardes van x van 60° tot 160°. (Neem $1'' = 20°$ op x-as en $1'' = 1$ eenheid op die y-as).

Lei van u grafieke af vir watter benaderde waardes van x tussen 60° en 160°—

(i) $\tan\left(\frac{x}{2} - 20°\right) = \cdot 7.$

(ii) $\tan\left(\frac{x}{2} - 0°\right) = 2 \sin x.$ [20]

DIE ANALITIESE MEETKUNDE IN DIE NUWE WISKUNDELEERPLAN VIR DIE MIDDELBARE SKOOL

Deur Prof. D. J. VAN ROOY

(*Toespraak gelewer voor Vakvergadering op 26 September 1959 by geleentheid van die Kongres.*)

Die Analitiese Meetkunde kom in die deel van die leerplan voor wat slegs vir universiteitstoelating bedoel is. Dit bevat kortliks die volgende:

Die rigting van 'n lynstuk.

Die afstand tussen twee gegewe punte.

Die koördinate van die middelpunt van 'n lynstuk met gegewe eindpunte.

Vraagstukke soos die bepaling van die locus van 'n punt wat onderhewig aan 'n gegewe voorwaarde beweeg.

Enkele vorme van die vergelyking van 'n reguit lyn.

Gradiënt van 'n lyn; voorwaardes vir ewewydigheid en reghoekigheid.

Onder die „Inleidende Opmerkings" lees ons hieromtrent: „Daar sal opgemerk word dat 'n taamlike deel van die werk bestaan uit leerstof wat reeds onder die hoof ‚Grafieke' behandel is." Inderdaad is dit die geval maar die doelstelling is dan tog heeltemal verskillend. Immers, Grafieke is 'n aanskoulike metode om sekere algebraïese stof te behandel soos bv.: die verloop van 'n funksie te illustreer of om 'n vergelyking op te los. Aan die ander kant is die Analitiese Meetkunde 'n algebraïese metode om die eienskappe van 'n figuur te bestudeer. Die rolle word dus feitlik net omgekeer. Eintlik is dit jammer dat hierdie nuwe en kragtige metode om meetkunde te bestudeer net op die bekende, allereenvoudigste figuur, nl. die reguit lyn, toegepas moet word. Sy waarde word eers ten volle besef wanneer dit aangewend word om die eienskappe van onbekende figure, bv. van kegelsnedes, af te lei. Dit lê egter buite die bestek van die Middelbare skool.

Wat moet dan ons doel en strewe wees met die invoering van genoemde stof uit die Analitiese Meetkunde? 'n Eerste vraag wat hom voordoen is of en in hoeverre die nuwe materiaal kan dien as 'n welkome en nuttige aanvulling van ander stof in die leerplan, met name Algebra en Meetkunde. Dit lê taamlik voor die hand dat die Analitiese Meetkunde sowel in inhoud as in metode hier 'n mate van integrasie kan bewerkstellig, asook van verlewendiging. Beide die Algebra en die gewone Meetkunde loop gevaar om in die behandeling op skool 'n oorwegend *statiese* karakter aan te neem. Dit in 'n tyd soos die moderne wat tintel van beweging, beweeglikheid en verandering! Wat word in die Algebra-onderwys die meeste benadruk? Is dit nie die vergelyking en sy oplossing nie, waarby een of meer (in elk geval net enkele) waardes vir die onbekende x te voorskyn kom? *'n Statiese proses* wat selfs deur 'n grafiese behandeling nie verlewendig kan word nie. Wat is die stof wat in die Meetkunde in behandeling kom? Starre figure en hulle verstarde eienskappe. Nou kom die Analitiese Meetkunde met 'n belofte, nl. om 'n bietjie lewe in die doodsbeendere te blaas. Dit kan egter by 'n belofte bly en ook versteen as die nodige aansluiting by die res van die leerplan nie gevind word nie. Trouens, dit moet juis help om die res van die leerplan te aktiveer! In die Analitiese Meetkunde is x en y *veranderlikes* en word 'n figuur of kromme deur 'n *bewegende punt* beskrywe. Veranderlikheid en beweging word soos by 'n Democritus van ouds as 't ware met mekaar vereenselwig, iets wat op 'n ander vlak 'n wesenstrek van die matematiese natuurwetenskappe is. Dit is dan wenslik dat die veranderlikheid van x en y reeds in die behandeling van die Algebra meer op die voorgrond tree en dat, waar enigsins moontlik, die beweeglike element ook in die Meetkunde tot sy reg kom.

(i) *In die Algebra*:

Alhoewel die belangrikheid van die vergelyking nie ontken word nie en daaraan sy regmatige plek toegeken moet word, moet vroeëer en deegliker aandag aan funksie en formule bestee word. Vergelyking en onbekende is *statiese* begrippe, funksie en veranderlike daarenteen *dinamies*. Die grafiese oplossing van 'n vergelyking is leersaam, veral solank dit die enigste bekende oplossingsmetode is. Waarom egter tot vervelens toe met pynlik-presiese parabooltekening aanhou as die formule vir die wortels van $ax^2 + bx + c = o$ beskikbaar is? En dan, die *vergelyking* eis al daardie werk om *twee* punte te bepaal terwyl die *funksie* die hele

grafiek bestryk. Is in hierdie verband ongelykhede nie van veel groter belang as gelykheid of vergelyking nie? Verandering van $f(x)$ met x en selfs veranderingstempo van $f(x)$ met x, dit is die aktuele dinge wat beklemtoon moet word. Die baan word deur 'n bewegende punt beskryf en op elke plek teen 'n bepaalde tempo. So 'n behandeling voer o.a. regstreeks op die begrippe van die Differensiaalrekening af.

(ii) *In die Meetkunde*:

Hier is beweeglikheid, afgesien van locus en sy toepassinge, uiteraard meer beperk. Beskou egter die geval van die raaklyn aan 'n sirkel. Volgens die beste definisie word dit verkry as limietstand van 'n bewegende snylyn. In die oorgang tot hierdie limietstand kan verskeie belangrike raaklynstellinge op 'n baie aanskoulike manier uit sekere snylynstellinge afgelei word. Dit is egter hoofsaaklik die *locus-begrip* wat die band tussen die gewone Meetkunde en die Analitiese Meetkunde lê. Dit is te betreur dat hierdie begrip in die onderwys van die Meetkunde nie heeltemal tot sy reg kom nie. Alhoewel die vrae wat daarop betrekking het gewoonlik van baie eenvoudige aard is, word hulle die swakste van almal beantwoord. En dit ten spyte van die feit dat geen bewyse gevra word nie.

Die algebraïese veranderlike en die meetkundige locus kom in die Analitiese Meetkunde tot 'n innige eenheid. Die bewegende punt P word aangedui deur „lopende'' koördinate (x, y) en die voorwaarde waaronder P beweeg word in algebraïese taal vertolk deur die vergelyking van die baan van P. Hier vind dus vertaling plaas: meetkundige begrippe word vervang deur algebraïese simbole en formules. Begrippe wat daarvoor in aanmerking kom, is o.a. punt, lynstuk, reguit lyn, driehoek, gradiënt, ewewydig, reghoekig, afstand. 'n Punt word deur koördinate voorgestel, 'n lynstuk se lengte deur 'n formule, 'n reguit lyn deur 'n lineêre vergelyking. Ewewydigheid en reghoekigheid word deur algebraïese betrekkinge voorgestel. Aan die feit dat 'n figuur as die baan van 'n bewegende punt beskou moet word, moet vasgehou word. So is bv. 'n reguit lyn ewewydig aan die x-as die baan van P (x, y) wat beweeg onder voorwaarde dat y konstant is. Vandaar sy vergelyking: $y = k$ (x willekeurig). En 'n reguit lyn deur die oorsprong is die baan van P (x, y) wat beweeg onder voorwaarde dat $y \div x$ konstant is. Vergelyking: $y = kx$. Volle gebruik moet van die afstandsformules gemaak word om telkens die voorwaarde vir die beweging van P in algebraïese taal weer te gee al sou dit 'n enkele keer tot 'n baan lei wat nie 'n reguit lyn is nie. As voorbeelde:

Bepaal die vergelyking van die baan van $P(x, y)$ wat so beweeg dat:

1. sy afstand van die x-as = sy afstand van die y-as;
2. sy afstand van die x-as = $\frac{2}{3}$ van sy afstand van die y-as;
3. sy afstand van die lyn $x = -2$ gelyk is aan tweemaal sy afstand van die lyn $y = 1$;
4. sy afstand van die punt (1, 2) = sy afstand van die punt (5, 3);
5. sy afstand van die oorsprong = 2 maal sy afstand van die punt (3, 5);
6. sy afstand van die punt (2, 0) = sy afstand van die y-as.

Dit is seker onnodig om verder in besonderhede te gaan. Met die weinige wat deur die leerplan voorgeskryf word, kan kostelike werk verrig word mits die regte nadruk op die begrippe val en die onderwys nie in 'n meganiese toepassing van formules verloop nie.

WISKUNDIGE OLYMPIADES

door

Dr. JOH. H. WANSINK

Arnhem

1. Onder Wiskundige Olympiades verstaan we nationaal, of althans regionaal georganiseerde wedstrijden in het oplossen van wiskundige opgaven, vergelijkende examens voor de middelbare-schooljeugd. Ze hebben tot doel de leerlingen in hun wiskundestudie te animeren, jeugdige talenten tijdig te ontdekken, topprestaties te honoreren, de keuze van een wiskundig beroep onder jongelui van goede aanleg te propageren en voorts om op den duur betrouwbare aanwijzingen te verzamelen voor een verantwoorde leerstofkeuze bij het V.H.M.O., waarmee in het bizonder de meer begaafde leerlingen zouden zijn gediend.

We treffen deze wedstrijden onder verschillende benamingen aan o.a. in Rusland, de Verenigde Staten van Amerika, Polen, Roemenië en Hongarije. Nederland kent ze niet. De „Wiskundige Opgaven" opgegeven door het Wiskundig Genootschap in ons land en de jaarlijkse prijsvragen van het W.G. vallen buiten de door ons beschouwde categorie, doordat het niveau ervan ligt boven dat wat we voor de Olympiades hebben aangegeven.

De prijzen die in deze nationale competities worden uitgereikt, zijn b.v.: speldjes, bekers, eervolle vermeldingen, boeken en studiebeurzen, terwijl daarnaast soms van particuliere zijde belangrijke geldprijzen ter beschikking worden gesteld. Zo kreeg in Californië een vijftienjarige scholier van een commerciële instelling een prijs van $ 1000.

2. Voor wie zich ten aanzien van de diverse olympiades in het buitenland enigszins wil oriënteren, noemen we de volgende litteratuur.

a. R. Kalin and Robert Fouch, *Mathematical Testing in Russia*, Mathematics Teacher LI, pp. 434 e.v.;
b. W. H. Fagerström and D. B. Lloyd, *The National High School Mathematical Contest*, Math. Teacher LI, pp. 434 e.v.;
c. R. W. Schoemaker, *The evolution of a mathematical contest*, Mathematics Teacher, LII, oktober 1959;

d. H. L. Alder, *The High School Mathematics Contest*, The American Mathematical Monthly, LXVI, pag. 138 e.v.;
e. R. Creighton Buck, *A Look at Mathematical Competitions*, The American Mathematical Monthly, LXVI, pp. 201, e.v.;
f. J. Aczél, *A Look at Mathematical Competitions in Hungary*, The American Mathematical Monthly, LXVII, pp. 435 e.v.;
g. A. van Twembeke, *Olympiade Mathématique Polonaise*, Mathematica & Paedagogia, no. 17, pp. 84 e.v.

Voorts verschijnen jaarlijks van de zijde van het Poolse Ministerie van Onderwijs rapporten over de laatst gehouden olympiade, waarin alle gegevens die erop betrekking hebben te vinden zijn; b.v. over de achtste olympiade: *Ósma Olympiada Matematyczna*, 71 blz. met de 12 + 6 + 6 opgaven in de opvolgende wedstrijden gesteld; alles voorzien van de oplossingen. De verzorging van het wiskundig gedeelte is van de hand van Prof. dr. St. Straszewicz.

Ir. L. L. Kossakowski, Rotterdam, was zo vriendelijk een aantal zakelijke gegevens uit genoemd rapport te vertalen; zijn bijdrage vindt men in par. 4 van dit artikel. Voor zijn welwillende hulp is de Redactie van Euclides hem zeer dankbaar.

In no. 17 van Mathematica & Paedagogia heeft onze Belgische collega Van Twembeke, kort voor zijn dood, een vertaling gegeven van een artikel in *Mathematics Teacher* van december 1958. Hiervan hebben we in par. 5 gebruik gemaakt.

Ook de officiële jaarverslagen van de *Mathematical Association of America* bevatten gegevens over de in de Verenigde Staten georganiseerde vergelijkende examens.

3. Tot de wiskundige olympiades kunnen we rekenen:
a. de wedstrijden om de Eötvösprijzen in Hongarije;
b. de vergelijkende examens aan de Stanford-University in de V.S.;
c. de wedstrijden georganiseerd door de Mathematical Association of America in samenwerking met de Society of Actuaries;
d. de Wiskundige Olympiades in Rusland, in Polen en in Hongarije.

Wat de onder *a* genoemde competities betreft, hiervan is voor de jaren 1894—1928 een volledig verslag te vinden in het in het Hongaars geschreven boek van J. Kurschak, *Matematikal Versenytetelek*, Budapest 1929, zoals blijkt uit het artikel van Creighton in de *American Mathematical Monthly*. Aczel wijst er in zijn vervolgartikel op, dat Buck's onderstelling dat deze prijsvragen in 1928 werden gestaakt, onjuist is. In feite werden ze tot op heden voortgezet, met onderbrekingen in de jaren 1919, 1920, 1921, 1944, 1946 en 1956, terwijl de naam in 1949 veranderd werd in

Kurschak-prijswedstrijden. De in 1960 gehouden Olympiade was de zestigste in de Hongaarse reeks.

Elk jaar werden er drie opgaven opgegeven van rekenkundig, algebraïsch en meetkundig karakter, voor de oplossing waarvan bekwaamheid en inzicht van meer betekenis waren dan parate kennis en vaardigheid. Creighton Buck geeft als typerende opgave het vraagstuk nummer 6 aan dat in par. 5 van dit artikel is opgenomen.

In de Hongaarse wedstrijden van 1958 werden er drie opgaven opgegeven, die in paragraaf 5 van dit artikel onder nummer 24, 25 en 26 zijn opgenomen. Voor deze wedstrijd, waarin men vijf uur aan de oplossing der vraagstukken mocht besteden, waren er 417 deelnemers, waarvan er 317 hun werk inleverden.

Er zijn tal van Hongaarse wiskundigen van naam die in hun jeugd tot de Eötvös-prijswinnaars behoorden. Een van hen, Polya, heeft de Hongaarse traditie in Amerika voortgezet bij de vergelijkende examens van de Stanford-University. Ook hier speelt inzicht een grotere rol dan routine in tegenstelling tot de onder *c.* vermelde universele test. Voor een eveneens door Buck geciteerd vraagstuk uit de Stanford-reeks zie vraagstuk 23 van par. 5. De deelname aan deze wedstrijd is relatief laag. In 1958 waren er 836 kandidaten.

De nationale wedstrijd georganiseerd door de Mathematical Society telde in 1958 meer dan 80.000 deelnemers verdeeld over 2889 high schools! De overeenkomstige getallen in 1957 waren 43.500 en 1469. De populariteit van deze competities beweegt zich in sterk stijgende lijn. Bijna alle Amerikaanse staten zijn in de wedstrijd vertegenwoordigd, daarnaast ook Canada.

De opgaven vormen een „multiple-choice-test". In 80 minuten hebben de kandidaten 50 vragen te beantwoorden, verdeeld in groepen van 20, 20 en 10 opgaven, die met 2, 3 en 5 punten per stuk kunnen worden gehonoreerd, waardoor er maximaal 150 punten kunnen worden verdiend. In 1958 was het hoogste aantal punten dat gescoord werd 146,25. Er kan bij deze tests waar de leerling het juiste antwoord uit een aantal gegeven antwoorden heeft te kiezen, gegokt worden. Bij de beoordeling wordt de theoretisch bereikbare winst door gokken geneutraliseerd doordat men de formule

$$S = C - \tfrac{1}{4}(T - C)$$

toepast, waarin C het aantal punten is dat aan de goede antwoorden wordt toegekend en T het aantal punten dat aan de beantwoorde nummers maximaal zou kunnen worden toegekend.

Er zijn varianten op de M.A.A.-test, o.a. de Wisconsin-test. Deze

bestaat uit twee etappes, waarvan de eerste een multiple-choice-test is en de tweede een non-objective perceptive type test.

Ook de Russische Olympiades kennen twee etappes. Er worden eerst plaatselijke wedstrijden georganiseerd en alleen zij die hierin een voldoend aantal punten behalen, worden toegelaten tot de tweede ronde. Slechts voor de prestaties in deze tweede ronde zijn prijzen beschikbaar. Er zijn afzonderlijke competities voor de leerlingen uit verschillende leerjaren. Aan Buck's artikel ontleen ik drie opgaven gegeven aan de hoogste klassen in het tournooi van Lvov (Lemberg) van 1956.

De inlichtingen over Polen van de hand van Ir. Kossakowski vindt men in de volgende paragraaf.

Over andere landen waar aan wedstrijden verbonden prijzen worden beschikbaar gesteld (o.a. Frankrijk) hopen we t.z.t. nadere mededelingen te kunnen doen.

De vraagstukken in par. 5 van dit artikel geven enig idee van wat er in de diverse wedstrijden van de kandidaten wordt verwacht. Bij de Poolse opgaven zijn curiositeitshalve enige vraagstukken, die ondanks de taalbezwaren begrijpelijk zijn, onvertaald opgenomen.

4. *De Poolse Wiskundige Olympiades.*

In Polen worden ieder jaar wiskundige olympiades georganiseerd. De eerste van deze reeks was in het schooljaar 1949/50.

Naast de eigenlijke olympiades voor de hoogste klassen der middelbare scholen organiseert men ook een soort voor-competitie voor de lagere klassen. In het verslag van de achtste olympiade (1956—57) wordt echter over een dergelijke voor-olympiade niets vermeld.

De deelnemers aan de olympiades worden steeds aan twee selectiewedstrijden onderworpen. De eerste selectie heeft plaats in de eigen scholen in de periode van begin oktober tot medio januari. Aan het begin van elke maand ontvangen alle deelnemers vier opgaven die ze zelfstandig binnen één maand moeten oplossen. Door bemiddeling van de scholen worden de oplossingen aan provinciale commissies ter beoordeling toegezonden. Zij die de beste oplossingen hebben ingezonden worden door de commissie opgeroepen voor deelname aan de tweede, de provinciale wedstrijden. Deze provinciale wedstrijden vormen de tweede selectie. Ze worden eind februari of begin maart in de hoofdsteden van de provincies gehouden en duren twee dagen. De deelnemers krijgen elke dag drie opgaven binnen vijf uur op te lossen. De wedstrijden worden in alle provincies gelijktijdig gehouden.

De winnaars van de provinciale wedstrijden worden door de

landelijke commissie toegelaten tot de finale te Warszawa (Warschau) aan het eind van maart of in het begin van april. Deze eigenlijke olympiade duurt twee dagen. De deelnemers krijgen elke dag drie opgaven, dus in het geheel zes opgaven, op te lossen.

De deelnemers aan de provinciale wedstrijden en aan de finale krijgen de nodige spoorkaartjes gratis toegezonden, ze hebben gedurende de wedstrijden gratis logies en verzorging en ze krijgen toegangsbiljetten voor musea, theaters, enz. De winnaars van de olympiade krijgen een diploma dat hen vrijstelling geeft van de toelatingsexamens tot de wis- en natuurkundige faculteiten van de universiteiten en tot de technische hogescholen. Bovendien worden hen door diverse instanties andere prijzen aangeboden, zoals horloges, boeken, reisbiljetten, enz. De leraren van de prijswinnaars in de olympiade ontvangen geldpremies.

Tijdens de eerste olympiade hebben 1209 scholieren deelgenomen aan de plaatselijke wedstrijden. Dit aantal steeg in de tweede olympiade tot 1234 en in de achtste tot 1629.

Tot de provinciale wedstrijden werden er in de tweede olympiade 256 leerlingen toegelaten. Hiervan promoveerden er 68 tot de finale en hiervan werd er aan 23 een prijs toegekend. Tijdens de achtste olympiade waren er 316 deelnemers aan de provinciale wedstrijden, waarvan er 64 in de finale kwamen. Hiervan kregen er 17 een diploma, maar naast deze 17 winnaars waren er nog 5, die een eervolle vermelding ontvingen.

De verslagen van de gehouden olympiades worden aan alle scholen toegezonden en zijn bedoeld als oefenmateriaal voor volgende wiskundige olympiades.

5. *Voorbeelden van opgegeven vraagstukken.*

Russische Olympiades.

1. Bewijs:

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \cdot \sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

2. Los op:

$$4^x - (13) \cdot 6^{x-1} + 9^x = 0.$$

3. Bereken de maximale waarde van de oppervlakte van een cilinder beschreven in een rechte cirkelkegel, waarvan de hoogte 12 is en de straal van de grondcirkel 4.

4. Los x, y en z op uit:

$$\begin{cases} (x+y+z)(ax+y+z) = k^2 \\ (x+y+z)(x+ay+z) = l^2 \\ (x+y+z)(x+y+az) = m^2. \end{cases}$$

5. Bereken de maximum- en de minimumwaarden van de functie:

$$y = 2 \sin x - \cos 2x.$$

Eötvös-prijsvraag.

6. Bereken alle gehele getallen x, y en z, waarvoor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

een geheel getal is.

Poolse Olympiade.

7. Rozwiązać uklad równań

Los op:

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = 992 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

8. Dowieść, ze dla kazdego trójkąta zachodzą nierówności

r is de straal van ing. cirkel
h_1 en h_2 zijn 2 hoogtelijnen
v.e. willk. Δ

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r},$$

gdzie r oznacza promień kola wpisanego w trójkąt, a h_1 i h_2 — dwie wysokosci tego trójkąta.

9. Dowieść, że jeżeli n jest liczbą calkowitą, to

Toon aan, dat $\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$ geheel is, als n geheel is

jest tez liczbą calkowitą.

10. Dowieść, że jeżeli (als) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, to

dan is $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}$.

11. Dowieść, ze między bokami a, b, c i kątami przeciwleglymi A, B, C trójkąta zachodzi związek

In elke Δ geldt: $a^2 \cos^2 A = b^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 C + 2bc \cos B \cos C \cos 2A$.

12. Voor welke waarde van m is de veelterm

$$x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$$

deelbaar door $x + y + z$?

13. Gegeven is dat H het hoogtepunt is van de ongelijkzijdige driehoek ABC. Bewijs, dat de stralen van de omgeschreven cirkels van de driehoeken ABH, BCH, CAH en ABC gelijk zijn.

14. Een horizontale, homogene cirkelschijf hangt aan drie verticale draden die aan de punten A, B en C van de omtrek van de schijf zijn bevestigd. AB = BC en hoek ABC = 2α. De massa van de schijf is m kg. Bereken, welke massa men aan de schijf in het

tegenpunt D van C moet bevestigen, opdat de spankracht in het in C bevestigde koord nul zal zijn.

15. Gegeven is:

$A = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + 5,$
$B = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma + 5,$
$C = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + 5,$
$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$, en $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Te bewijzen:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \leqq 4\sqrt{3}.$$

16. De lijnen die de hoekpunten van het viervlak $ABCD$ verbinden met de middelpunten van de ingeschreven cirkels van de overstaande zijvlakken, zijn concurrent. Bewijs:

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

17. Los x, y en z op uit:

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2z^2 = axyz \\ y^2z^2 + y^2x^2 = bxyz \\ z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz. \end{cases}$$

18. Gegeven:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

n is oneven en positief.

Te bewijzen:

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

19. Op een rechte l liggen opvolgend de punten M, D en H. Construeer een rechthoekige driehoek, waarvan M het midden is van de hypotenusa, D het voetpunt van de bissectrice en H het voetpunt van de hoogtelijn op de hypotenusa.

20. Gegeven:

a, b en c zijn natuurlijke getallen, waarvoor geldt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Te bewijzen:

1) tenminste een der getallen a en b is deelbaar door 3;
2) tenminste een der getallen a en b is deelbaar door 4;
3) tenminste een der getallen a, b en c is deelbaar door 5.

21. Bewijs dat een polygoon met een lengte $2a$ geheel bedekt kan worden door een cirkelschijf met middellijn a.

22. Gegeven zijn een bol met straal R en een vlak α, dat met de bol geen enkel punt gemeen heeft. S is een punt van α. Men beschouwt de omhullingskegel van de bol, die S tot top heeft. C is het middelpunt van de cirkel volgens welke de kegel de bol raakt.
Onderzoek wat de verzameling van C is, als S variabel is in α.

23. Bewijs, dat aan de vergelijking
$$2x^2 - 215y^2 = 1$$
geen enkel stel gehele wortels (x, y) voldoet.

Vergelijkend examen Stanford University.

24. In een willekeurige driehoek is de som van de · · · groter dan de halve omtrek.
Vervang in deze zin de drie stippen opvolgend door "hoogtelijnen", zwaartelijnen" en "bissectrices". Er ontstaan drie beweringen.
Onderzoek, of ze juist of onjuist zijn. Bewijs je antwoord.

Kurschak-competitie.

25. Gegeven worden zes punten in een plat vlak zodanig dat er geen drie collineair zijn.
Bewijs, dat men er drie kan uitkiezen, zó dat ze de hoekpunten vormen van een driehoek, waarvan één hoek minstens 120° is.

26. Gegeven is, dat $u^2 + uv + v^2$ een negenvoud is, terwijl u en v gehele getallen zijn.
Bewijs dat u en v beide drievouden zijn.

27. Van de convexe zeshoek $ABCDEF$ zijn de overstaande zijden twee aan twee evenwijdig.
Bewijs, dat de driehoeken ACE en BDF gelijke oppervlakte hebben.

Naschrift.

Door vriendelijke bemiddeling ontving de redactie van Euclides een zestal opgaven in 1960 gesteld op een in Roemenië gehouden internationale wiskunde olympiade.

Over de organisatie van deze wedstrijden kunnen we geen nadere bijzonderheden geven. De plaats *Sinaia* ligt ten noorden van *Boekarest* in de Transsylvanische alpen.

Deuxième olympiade internationale des mathématiques (Sinaia — 1960).

Première épreuve écrite.

1. Trouver tous les nombres de trois chiffres qui, divisés par 11, donnent un nombre égal à la somme des carrés des chiffres du nombre cherché.

2. Résoudre l'inéquation suivante:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9.$$

3. On donne un triangle rectangle ABC ($\angle A = 90°$); on divise l'hypoténuse en n parties égales, n étant un nombre impair. Si l'on note par α l'angle sous lequel on voit du point A le segment qui contient le milieu de l'hypoténuse, par h la hauteur du triangle et par a l'hypoténuse, démontrer que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

Seconde épreuve écrite.

1. Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs h_a, h_b des hauteurs issues des sommets A, B et la longueur m_a de la médiane issue du sommet A.

2. On donne un cube $ABCDA'B'C'D'$.
a. Déterminer le lieu géométrique des milieux des segments XY, ou X est un point quelconque du segment AC et Y un point quelconque du segment $B'D'$.
b. Déterminer le lieu géométrique des points Z du segment XY, tels que $\overline{ZY} = \overline{2XZ}$.

3. On considère un cône donné, la sphère inscrite dans ce cône et le cylindre circonscrit à cette sphère, ayant la base dans le plan de la base du cône. Soit V_1 le volume du cône et V_2 le volume du cylindre.
a. Démontrer que l'égalité $V_1 = V_2$ est impossible.
b. Déterminer le plus petit nombre k, tel que $V_1 = kV_2$ et, dans ce cas, construire l'angle au sommet du cône.

4. On donne un trapèze isocèle, ayant les bases a, b, et la hauteur h.
a. Construire sur l'axe de symétrie du trapèze un point P, d'où l'on voit les côtés non parallèles sous un angle de 90°.
b. Calculer la distance du point P de l'une des bases.
c. Discuter la possibilité de construction du point P.

PROGRAMMA VAN HET EXAMEN VOOR DE AKTE WISKUNDE M.O. A [1])

N.B. Met het oog op een nauwkeurige omschrijving van de examenstof is deze in het navolgende aangegeven door verwijzing naar zekere leerboeken. Dit houdt niet in dat uitsluitend of in de eerste plaats deze boeken als studieboeken in aanmerking komen.

I. Algebra

1. *De ontwikkeling van het klassieke getalbegrip*: natuurlijke getallen, gehele getallen, meetbare getallen, reële getallen, complexe getallen. Deze stof vindt men in vele leerboeken, b.v. die van Wijdenes en van Schuh en in G. Birkhoff and S. Maclane, A Survey of Modern Algebra (New York).

2. *Ringen en lichamen.*

   Datgene bevat in:
   P. Wijdenes, Beginselen van de Getallenleer, 2e druk:
   par. 1 (over de deelbaarheid) en par. 6 (over priemgetallen); deze stof vindt men ook in het eerste hoofdstuk van het reeds geciteerde boek van Birkhoff en Maclane.
   B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, deel I, 3e druk:
   par. 14. Ringe
   par. 15. Homomorphie und Isomorphie.
   par. 16. Quotientenbildung.
   par. 18. Polynomringe.
   par. 19. Ideale. Restklassenringe.
   par. 20. Teilbarkeit. Primideale.
   par. 21. Euklidische und Hauptidealringe.
   par. 22. Faktorzerlegung.

   N.B. Daarbij alleen commutatieve ringen en lichamen, en ringen *met* eenheidselement.

   Of de overeenkomstige stof uit F. Loonstra, Inleiding tot de Algebra. Noordhoff, Groningen. 1958.

[1]) De examencommissie wiskunde m.o. heeft verzocht het door haar opgestelde programma van het examen voor de akte wiskunde m.o.A in Euclides op te nemen. Gaarne voldoen wij aan dit verzoek.

3. *Groepen.*

Datgene behandeld in:
B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, deel I, 3e druk;
par. 9. Der Gruppenbegriff.
par. 10. Untergruppen.
par. 11. Das Rechnen mit Komplexen, Nebenklassen.
par. 12. Isomorphismen und Automorphismen.
par. 13. Homomorphie. Normalteiler. Faktorgruppen.
en (met het oog op voorbeelden van meer meetkundige aard)
G. Birkhoff and S. Maclane, A Survey of Modern Algebra, Chapter VI, Group Theory
òf
P. S. Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie (Berlin 1954), geheel,
òf de overeenkomstige hoofdstukken uit het bovengenoemde boek van Loonstra.

4. *Lineaire Algebra.*

Enige onderwerpen die tevens behoren tot de stof voor de Analytische Meetkunde, t.w.
a. Lineaire verzamelingen (= abstracte vectorruimten) van eindige rang (dimensie).
b. Stelsels lineaire vergelijkingen.
c. Determinanten.
d. Lineaire transformaties.
Zie voor nadere aanduiding onder Analytische Meetkunde.

5. *Gehele rationale veeltermen.*

Datgene behandeld in:
B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, deel I, 3e druk:
par. 23. Differentiation.
par. 24. Nullstellen.
par. 26. Faktorzerlegung.
par. 29. Symmetrische Funktionen.
par. 30. Die Resultante zweier Polynome.
par. 31. Die Resultante als symmetrische Funktion der Wurzeln
par. 32. Partialbruchzerlegung.

6. *Eerste beginselen van de theorie van de uitbreiding van lichamen.*

Datgene behandeld in:
B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, deel I, 3e druk:
par. 33. Unterkörper. Primkörper.
par. 34. Adjunktion.
par. 35. Einfache Körpererweiterungen.

De kandidaat dient goed bekend te zijn met de eerste begrippen uit de theorie der verzamelingen (eindige verzameling, aftelbaar oneindige verzameling, niet-aftelbaar oneindige verzameling, afbeelding van een verzameling in of op een andere, geordende verzameling) en de methode der volledige inductie.

II. Analyse

De examenstof bestaat uit de beginselen van de differentiaal- en integraal-rekening van functies van één veranderlijke, met inbegrip van de theorie der reeksen. De stof, zoals die voor het examen moet worden gekend, wordt vrijwel gedekt door:

N. G. de Bruijn, Beknopt leerboek der differentiaal- en integraalrekening, hoofdstukken 1 t/m 6, of

L. Kuipers, Leerboek der Analyse. Noordhoff, Groningen. 1960, of overeenkomstige hoofdstukken uit het eerste deel van:

R. Courant, Differential and integral calculus.

Voor enige onderwerpen wordt verwezen naar een uitvoeriger behandeling in F. Schuh, Nieuw leerboek der hogere algebra, 1944, deel 2, hoofdstukken 1, 2, 3, 4, 6 en 7.

In dit werk vindt men ook veel oefenmateriaal, evenals in de overeenkomstige hoofdstukken van

P. Wijdenes, Middel Algebra, I en II.

Een groot aantal eenvoudige vraagstukken vindt men verder in:

W. J. H. Salet e.a., Vraagstukken over analyse en algebra.

III. Analytische Meetkunde

Het verdient aanbeveling de studie te beginnen met het bestuderen van een leerboek voor het v.h.m.o.

De stof is in hoofdzaak te vinden in:

G. Bol, Elemente der Analytischen Geometrie, I, II. Van den Hoeck en Ruprecht, Göttingen, 1948 en 1949.

Van deel I kunnen weggelaten worden: par. 32 Inversion; par. 33 Die Aufgaben von Apollonius; par. 34 Winkeltreue; par. 35 Inversion an einer Kugel; par. 36 Stereographische Projektion; par. 45 Das Vektorprodukt; par. 46 Inhalt eines Parallelflaches; par. 47 Kürzester Abstand zweier Geraden (dit onderwerp kan wel gevraagd worden, maar het is niet nodig het vectorprodukt daarbij te gebruiken).

Aan de onderwerpen in deel I, par. 60 t/m 65 (Algebraische Gleichungen t.e.m. Tangentenebene) moet wel enige aandacht besteed worden, maar de behandeling kan beperkt blijven tot de

hoofdzaken (zoals de vergelijkingen van raaklijn en raakvlak)

Bij deel II kan men zich beperken tot par. 1 t/m 31.

J. G. Rutgers, Inleiding tot de analytische meetkunde, I, II. Noordhoff, Groningen.

Van deel I (4e druk): hoofdstuk IV (meetkundige plaatsen), hoofdstuk V, par. 6 (poolverwantschap), hoofdstuk VI, par. 1 en 2 (bundels, kegelsneden).

Van deel II: hoofdstuk V, par. 1 t/m 4 en hoofdstuk VII, par. 1 (pooltheorie).

Enige der genoemde onderwerpen (b.v. „meetkundige plaatsen" of „voorwaarden waaraan kegelsneden of kwadratische oppervlakken voldoen") zullen incidenteel in vraagstukken wel eens voorkomen, maar een systematische behandeling lijkt niet aangewezen. Van de pooltheorie zullen bij dit examenvak alleen de hoofdzaken een rol spelen (een behandeling van details is meer aangewezen bij het hierna genoemde vak Projectieve en Beschrijvende Meetkunde), terwijl bij de behandeling van de bundels ook beperking gewenst is (b.v. in deel I, Hfdst. VI, par. 2 wel behandeling van de onderparagrafen 146, 147 (vluchtig), 149 (eerste helft), 150, 151, 153, 154 (eerste helft), 155, 156, 157, 158 (vluchtig).

Lineaire Algebra.

a. Lineaire verzamelingen (= abstracte vectorruimten) van eindige rang (dimensie).
b. Stelsels lineaire vergelijkingen.
c. Determinanten.
d. Lineaire transformaties.

Deze stof is die welke wordt behandeld in:

N. G. de Bruijn, Lineaire algebra. Dictaat verkrijgbaar aan het Mathematisch Instituut van de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam. Voor een aanvulling van dit dictaat op het punt van de kwadratische oppervlakken kan verwezen worden naar hetgeen hierover te vinden is in het bovengenoemde boek van G. Bol, deel II, of in

N. H. Kuiper, Analytische Meetkunde verklaard met Lineaire Algebra. Noordhollandse Uitgeversmij., Amsterdam.

Hierbij is een geschikte vraagstukkenverzameling:

B. W. Steggerda e.a. Vraagstukken over Analytische Meetkunde en Lineaire Algebra (Handleidingen bij het onderwijs aan de T.H. No. a.4).

IV. Projectieve en Beschrijvende Meetkunde.

Het examen in dit onderdeel wordt alleen mondeling afgenomen.

a. Projectieve meetkunde.

De volgende onderwerpen behoren tot de examenstof: dubbelverhoudingen, projectieve puntreeksen en waaiers, dualiteitsprincipe, affiniteit en centrale collineatie, de stellingen van Desargues en Pappus, voortbrenging van kegelsneden door projectieve lijnenwaaiers, de stellingen van Pascal en Brianchon, pool en poollijn, volledige vierhoeken en vierzijden, involuties, projectiviteiten op kegelsneden, iets over bundels, projectieve constructies.

Kennis van een axiomatisch-synthetische opbouw wordt niet vereist. De stof wordt behandeld in o.a.

Hopkins en Hails. Plane projective geometry, hoofdst. I t/m XIII, Oxford, 1953.

De wijze van behandeling in verschillende boeken is niet dezelfde; daarmede zal bij het examineren zoveel mogelijk rekening worden gehouden.

b. Beschrijvende meetkunde.
Centrale projectie (beknopt).

H. J. van Veen, Beknopt leerboek der beschrijvende meetkunde. Hoofdst. 2 en 3, of

H. de Vries, Leerboek der beschrijvende meetkunde I, Hoofdst. I.

DE EINDEXAMENS AAN HOGEREBURGERSCHOLEN.

Naar aanleiding van het bekende Koninklijk Besluit 390 is door het bestuur van Wimecos de volgende brief verzonden:

Arnhem,
——— 15 november 1960.
Zeist,

Aan Zijne Excellentie de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen,
's-Gravenhage.

Excellentie,

Het Bestuur van Wimecos, vereniging van leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie, neemt de vrijheid enige opmerkingen naar aanleiding van het Koninklijk besluit 390 betreffende de eindexamens aan hogereburgerscholen onder de aandacht van Uwe Excellentie te brengen.

Deze opmerkingen betreffen (A) de status van de mechanica op de hogereburgerschool en (B) de wiskunde op de eindexamens van de hogereburgerschool.

Omdat onze bezwaren in veel sterkere mate de nieuwe regeling ten aanzien van de mechanica dan de wijzigingen in het eindexamen wiskunde aangaan, willen we de nadruk leggen op de status van het vak mechanica op de hogereburgerschool als onderdeel van het leerplan en als onderdeel van het eindexamen en ons voorlopig in dit adres wat de wiskunde betreft beperken tot enige opmerkingen over het bestaande instituut der vrijstellingen.

A. *De status van de mechanica op de hogereburgerschool.*

Wij zijn van oordeel, dat de samenvoeging van de vakken mechanica en natuurkunde op verantwoorde wijze tot stand zal kunnen komen bij een herziening van de wet op het middelbaar onderwijs, eventueel bij de totstandkoming van de wet op het voortgezet onderwijs, d.w.z. bij een algemene reorganisatie van het betreffende onderwijs, waarbij door nieuwe leerplannen, nieuwe urentabellen, enz., een doeltreffend functioneren van de samenvoeging kan worden verzekerd. Aan een incidentele samenvoeging, zoals die in het Koninklijk besluit 390 wordt tot stand gebracht, kleven ernstige bezwaren, waarop wij gaarne willen wijzen. Deze samen voeging vloeit geenszins voort uit de gronden, die volgens de circulaire van 3 oktober 1960, (V.H.M.O. 143837) aanleiding zijn geweest tot het uitvaardigen der nieuwe voorschriften.

Wij zien in de samenvoeging geenszins een noodmaatregel die in de als interimregeling te duiden voorschriften op zijn plaats zou zijn, maar veel meer een vooruitlopen op toekomstige wetswijzigingen.

Op dit ogenblik figureert de mechanica in art 3 van de wet op het middelbaar onderwijs nog als afzonderlijk leervak, kunnen akten van bekwaamheid voor middelbaar onderwijs in de mechanica (K 2 en K 6) worden verleend en kan voor de doctorale examens in de faculteit der wis- en natuurkunde het vak mechanica met daaraan verbonden onderwijsbevoegdheid nog steeds als volwaardig bijvak worden gekozen.

Niet alle docenten die onderwijsbevoegdheid hebben voor natuurkunde op grond van met gunstig gevolg afgelegd doctoraal examen hebben tevens de bevoegdheid voor mechanica.

Vier aspecten, die ons ten aanzien van de premature samenvoeging van mechanica en natuurkunde, zoals die in het Koninklijk besluit 390 wordt tot stand gebracht, zijn opgevallen, willen wij gaarne onder de aandacht van Uwe Excellentie brengen.

1. Vele candidaten zullen in 1961 terloops in mechanica worden geëxamineerd door de natuurkundeleraar, eventueel door een natuurkundeleraar zonder onderwijsbevoegdheid voor mechanica, terwijl zij in de cursussen 1959—1960 en 1960—1961 onderwijs in dit vak hebben gehad van een wiskundeleraar met mechanicabevoegdheid.
   Ook ingeval de natuurkundedocent de bevoegdheid voor mechanica wel bezit past de thans voorgeschreven wijze van examineren toch kwalijk in het systeem van schoolexamens. De natuurkundeleraren zien zich hier een in de gegeven omstandigheden onaangename taak opgedrongen; het zal niet mogelijk zijn door tijdelijke adjunctie van de leraar in wiskunde en mechanica aan de examens natuurkunde te bewerkstelligen, dat elke candidaat toch door zijn eigen leraar in mechanica wordt geëxamineerd; in de nieuwe regeling is de wiskundeleraar alleen reeds met de wiskunde-examens volledig bezet.
2. Op een aantal meestal kleine scholen wordt het onderwijs in de natuurkunde en de wiskunde aan één docent opgedragen. Deze combinatie heeft zelfs de

tendens frequenter te worden, door de toename van het aantal onbevoegde docenten aan onze scholen, aan wie men toch bezwaarlijk het onderwijs in de examenklassen kan opdragen.
Het is examen-technisch niet mogelijk voor al deze docenten een rooster voor het mondeling examen te maken. Deze docenten zijn door de wiskunde-examens reeds volledig bezet. In de oude regeling was deze combinatie wel mogelijk, doordat men de tijden voor de mondelinge examens natuurkunde zo goed als geheel met de tijden voor de mondelinge examens mechanica kon laten samenvallen.

3. Het Koninklijk besluit 390 is aanmerkelijk te laat afgekondigd om zonder schade voor onderwijs en eindexamens reeds in 1961 te kunnen worden uitgevoerd. Om te voorkomen dat in de eindexamenklassen der onder 2 bedoelde scholen het onderwijs in de natuurkunde en in de wiskunde in één hand is, hadden de rectoren en directeuren reeds voor 1 september 1960 van de nieuwe regeling op de hoogte dienen te zijn; ze hadden er dan bij de vaststelling der roosters rekening mee kunnen houden. Om te zorgen dat de candidaten ook voor mechanica in 1961 door hun eigen leraren worden geëxamineerd had de regeling reeds voor 1 september 1959 bekend dienen te zijn; de rectoren en directeuren hadden dan de wiskundeleraren met mechanicabevoegdheid van het onderwijs in de klassen IV en V kunnen uitsluiten en dit onderwijs alleen kunnen opdragen aan natuurkundeleraren met of zonder mechanicabevoegdheid.

4. Er zijn tal van lycea, waar de candidaten voor het eindexamen gymnasium-B in de hoogste klassen de lessen in de wiskunde en in de natuurwetenschappelijke vakken op de afdeling B van de hogereburgerschool volgen, met uitzondering van de lessen in mechanica en cosmografie. Deze leerlingen nemen deel aan het eindexamen hogereburgerschool-B in wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie.
Zij zullen in 1961 examenwerk voor mechanica en natuurkunde moeten maken, terwijl de hiervoor noodzakelijke voorbereiding bij hen ontbreekt. Het zal moeilijk zijn de impasse waarin deze leerlingen dreigen te geraken te vermijden en toch de combinatie van mechanica met natuurkunde, die in het Koninklijk besluit 390 tot stand wordt gebracht, tot zijn recht te doen komen.
Om aan de hierboven genoemde bezwaren tegemoet te komen, is het o.i. onvermijdelijk het Koninklijk besluit 390 ingeval het niet wordt ingetrokken één of twee jaar later in werking te doen treden, indien althans de mechanica zijn status van zelfstandig examenvak zal verliezen.
Wij dringen er echter met klem bij Uwe Excellentie op aan in afwachting van het tijdstip waarop de mechanica als zelfstandig leervak voor de hogereburgerschool zal zijn geschrapt en de garanties voor een goed functioneren van de mechanica binnen de natuurkunde zullen zijn geschapen, de mechanica als zelfstandig examenvak te handhaven.
Deze handhaving is zelfs mogelijk met inachtneming van de beoogde inkorting der tijden voor het mondeling eindexamen binnen de grenzen door het Koninklijk besluit 390 gesteld door het vak schriftelijk te blijven examineren; deze handhaving zal op geen enkele wijze het aantrekken van deskundigen voor wiskunde en mechanica ongunstig beïnvloeden.
Hierbij wijzen we nog op twee mogelijkheden:

1°. Het gemiddeld rapportcijfer voor mechanica in de examenklasse wordt in de plaats gesteld van het cijfer voor het mondeling examen.

2°. Het cijfer voor het schriftelijk examen mechanica geldt tevens als eindcijfer voor dit vak.

Wij wijzen er echter op, dat in het onder 2° bedoelde geval het noodzakelijk zal zijn, dat het werk voor het schriftelijk examen een enigszins ander karakter krijgt dan het de laatste jaren heeft gehad. Als elke compensatie die een mondeling examen kan bieden, komt te ontbreken, dient een deel der opgaven te bestaan uit eenvoudige theorievragen, zoals die totnogtoe ook op mondelinge examens plegen te worden gesteld.

Bij invoering van groepscijfers kan het eindcijfer voor mechanica met de drie cijfers voor de wiskundevakken worden gemiddeld.

B. *De wiskunde op de eindexamens hogereburgerschool.*

Wat het instituut der vrijstellingen op de eindexamens der hogereburgerscholen betreft, delen wij Uwe Excellentie mede, dat Wimecos zich reeds in 1948 in een rapport aan het College van Inspecteurs van het V.H.M.O. na afweging van de argumenten die vóór en de argumenten die tegen de vrijstellingen pleiten, heeft uitgesproken vóór de handhaving van de vrijstellingen in het eindexamen der hogereburgerscholen. Wij waarderen ook nu het instituut dezer vrijstellingen. Wij zijn van oordeel, dat centraal opgegeven schriftelijk werk, indien de opgaven juist worden gekozen, een betere garantie biedt voor de totstandkoming van een objectief oordeel ten aanzien van kennis en inzicht der candidaten dan een mondeling onderzoek van de beperkte duur die binnen een eindexamen mogelijk is.

Wij beschouwen de bepaling, dat een vrijstelling slechts gegeven wordt, als voor het desbetreffende onderdeel of vak tenminste het cijfer 7 is behaald, waarbij de 7 niet mag zijn ontstaan door afronding naar boven, als een verbetering ten opzichte van de thans bestaande toestand.

Wij bevelen onze opmerkingen over de bezwaren die aan een onveranderd en onverwijld in werking stellen van het Koninklijk besluit 390 voor onze scholen verbonden zouden zijn in Uwe welwillende aandacht aan.

Namens het Bestuur van WIMECOS:
dr. Joh. H. Wansink voorzitter,
J. F. Hufferman secretaris,
Charlotte de Bourbonlaan 64,
Zeist.

CONTRIBUTIE WIMECOS

De penningmeester van Wimecos verzoekt de leden die hun contributie over 1960/61 nog niet hebben betaald, *f* 8,00 te willen overschrijven op postrekening 143917 t.n.v. Wimecos te Amsterdam.

MEDEDELING

Genootschap „Johann Bernoulli"

Secretariaat: Reitdiepskade 4, Groningen

Te Groningen is op 22 oktober 1960 opgericht het Genootschap „Johann Bernoulli", dat zich ten doel stelt de beoefening van de wiskunde in de provincies Groningen, Friesland en Drente te bevorderen. Hiertoe zullen jaarlijks een vijftal voordrachten over wiskundige onderwerpen worden gehouden, terwijl de mogelijkheid om cursussen en/of colloquia over bepaalde onderwerpen te organiseren, nader zal worden onderzocht. Er zal zowel aandacht worden besteed aan de zuivere als aan de toegepaste wiskunde. Op de eerste bijeenkomst traden 45 leden toe, welk aantal inmiddels is toegenomen tot 66.

Het bestuur is als volgt samengesteld:

Prof. dr ir A. I. van de Vooren, *voorzitter*;
Dr W. Verdenius, *secretaris*;
J. Boersma, *penningmeester*;
H. G. Brinkman;
G. Krooshof;
H. W. Lenstra.

Tot nu toe werden de volgende voordrachten gehouden:
22 oktober 1960, Prof. Dr F. van der Blij (Bilthoven):
„De ζ-functie in verschillende gedaanten".
10 december 1960, Prof. Dr S. C. van Veen (Delft):
„Partities".

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Jan Huitzingstraat 43, Hoogezand.

WIMECOS

Algemene vergadering op *woensdag 28 december 1960* in *„Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht.* Aanvang 10,30 uur. Voor de voorlopige agenda zie men het vorige nummer (blz. 93).

JAARVERGADERING LIWENAGEL

Op *zaterdag 4 februari 1961* wordt de jaarvergadering van Liwenagel gehouden te *Utrecht* in *Hotel Smits, Vreeburg,* hoek Lange Viestraat.

Huishoudelijk gedeelte. Aanvang 15 uur.

1. Opening.
2. Notulen van de vorige vergadering.
3. Verslag kascommissie; décharge van de penningmeester.
4. Benoeming kascommissie.
5. Rondvraag.

Wetenschappelijk gedeelte.

Sectie wiskunde. Aanvang 15.15 uur.

Voordracht van Drs. A. J. Th. Maassen over Verzamelingen, Relaties en Transformaties.

De laatste jaren staat de vraag, op welke wijze het wiskunde-onderwijs kan worden gemoderniseerd, in het centrum van de belangstelling. Door de Nederlandse Onderwijscommissie voor wiskunde is een rapport samengesteld over de vraag, welke onderwerpen uit de hogere wiskunde geschikt gemaakt kunnen worden voor het V.H.M.O. Drs. Maassen is een van de samenstellers van dit rapport. Hij zal dus mogelijkheden bespreken om tot doelmatige vernieuwing van ons onderwijs te komen.

De leden van Wimecos nodigt het bestuur van Liwenagel gaarne uit de vergadering bij te wonen.

Sectie natuurwetenschappen. Aanvang 15.15.

Voordracht van Prof. Dr. A. W. H. van Herk over De biochemie en het V.H.M.O

Leden van Velines en Velibi zijn hartelijk welkom.

D. Leujes, *Secretaris.*

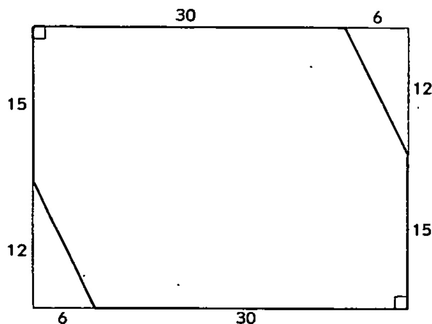
RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

37. Zeven dieven hebben een aantal goudstukken gestolen, doch ze zitten met de moeilijkheid dat ze niet kunnen verdelen, omdat het aantal niet door zeven deelbaar is. Tenslotte besluiten ze de hoeveelheid te verdelen op de volgende wijze: de eerste dief krijgt één goudstuk en verder nog $^1/_7$ deel van de rest; de tweede krijgt 2 goudstukken en nog $^2/_7$ deel van het nu nog resterende; de derde krijgt 3 munten en $^3/_7$ deel van wat er nog overblijft, enz., de laatste, de zevende dief ontvangt dus 7 goudstukken en $^7/_7$ deel van wat er over is.

Wat is het kleinste aantal goudstukken waarmee dit gedaan kan worden en hoeveel krijgt elke dief?

38. Gegeven is een tapijt van de vorm



Maak hiervan een vierkant tapijt met slechts één naad.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer).

35. Het getal is $715a + 364b + 924c$, verminderd met zoveel keren 1001 als nodig is om beneden de 1000 te komen.

De oplossing berust op het feit, dat 715 deelbaar is door 11 en door 13, maar bij deling door 7 de rest 1 geeft, dat 364 een 7-voud, een 13-voud en een 11-voud + 1 is en 924 een 7-voud, een 11-voud en een 13-voud + 1.

Een andere methode, die misschien vlotter werkt als de oplossing snel, b.v. voor de klas, „vertoond" moet worden, is de volgende.

Noem de rest van $2(a - b)$, zo nodig vermeerderd met 7, 14 of 21, bij deling door $7 : p$.

Noem $11p + b = q$.

Noem de rest van $q - c$, zo nodig vermeerderd met 13, bij deling door $13 : r$.

Het getal is dan $G = 77r + q$.

Het bewijs van deze oplossing, waarvan we de uitwerking gaarne en met vertrouwen aan de lezer overlaten, berust op het berekenen van de rest q bij deling van het onbekende getal door 77 uit a en b en vervolgens van de rest G bij deling door 1001 uit q en c.

36. In de figuur zijn de stroken vervangen door lijnen. Het aantal halve slagen is door n voorgesteld. Voor $n = 1$ en voor $n = 2$ is de oplossing evident.

